



**Комаристый
Евгений Николаевич**

— начальник отдела маркетинга
авиакомпания «Сибирь».

В 1999 г. окончил
Новосибирский
государственный университет
по специальности «экономист-
математик», в 2001 г. —
магистратуру экономического
факультета НГУ.
(Новосибирск)

Математические подходы к анализу спроса на пассажирские авиаперевозки

Современная теория спроса достаточно подробно описывает поведение потребителей с помощью математических моделей. Математическая запись наглядна, понятна и логична — это позволяет с легкостью моделировать различные экономические ситуации и предсказывать развитие событий реальной жизни на основе событий, построенных по результатам математических исчислений. Данная статья содержит описание математических подходов к анализу и прогнозированию спроса на рынке пассажирских авиаперевозок.

При анализе спроса на услуги транспорта в общем и авиационного транспорта в частности можно использовать математический инструментарий. Айвор Пирс [3] при анализе спроса рассматривает прежде всего т. н. потребительную стоимость. Традиционное представление, согласно которому потребительная стоимость товара зависит от количества данного товара (а также прочих товаров, которыми располагает потребитель), выражается в виде функции полезности:

$$U = U(x_1, \dots, x_n),$$

где x_i — количество i -го потребляемого товара. Поведение потребителей предполагает максимизацию значений U при соблюдении следующего бюджетного ограничения:

$$B = \sum_i p_i x_i,$$

где B — набор благ при фиксированном доходе потребителя, а p_i — цена i -го товара.

Запись спроса на услуги авиатранспорта в этих терминах и применение методов математического анализа к такой записи позволяет анализировать и прогнозировать спрос, а также измерять такую характеристику спроса, как эластичность.

Зафиксируем основные предположения относительно спроса на транспортные услуги.

1. Человек, обращаясь за транспортными услугами, руководствуется, с одной стороны, своим предпочтением того или иного вида транспорта, а с другой стороны — существующими ценами и своим фиксированным доходом.

2. Предпочтение людьми определенного вида транспорта — отражение потребительских свойств транспортных услуг — предполагает наличие у него функции полезности $U(y)$, определенной в n -мерном пространстве транспортных услуг (воздушный, железнодорожный, автомобильный и др.).

Функция полезности обладает следующими свойствами:

■ полезность от использования каждого конкретного вида транспорта положительна;

■ функция считается непрерывно дифференцируемой (по крайней мере, дважды дифференцируемой);

■ имеет положительные первые частные производные и отрицательно определенную матрицу Гессе вторых частных производных;

■ с уменьшением количества доступных видов транспорта полезность каждого конкретного вида увеличивается;

■ с увеличением количества доступных видов транспорта полезность каждого конкретного вида уменьшается.

Математически эти свойства можно описать так:

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} > 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y_i} = \infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$$

Величина y в данной задаче представляет собой вектор, компонентами которого являются

количество поездок на конкретных видах транспорта междугородного сообщения в расчете на одного жителя в течение года.

Введем для потребителя допустимое множество транспортных услуг, обозначим его через Y . Y принадлежит n -мерному евклидову пространству, т. е. это множество точек, каждая из n координат которых соответствует частоте пользования каждым из n видов транспорта. Математическая запись:

$$Y = \begin{cases} Y \in E^n, \\ c \times y \leq B, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

E^n — n -мерное евклидово пространство¹;

B — бюджетное ограничение;

c — вектор цен на транспортные услуги;

y — количество поездок.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на транспортные услуги не могут превышать той части денежного дохода потребителя, которую он предусмотрел для поездок. Вектор c состоит из n цен в денежном выражении: $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, где c_i — цена на услуги i -того вида транспорта. Поскольку цены определяются перевозчиками, для потребителя они считаются заданными. Задан также и денежный доход. Цены, доход и количество поездок выражаются неотрицательными числами.

Таким образом, смысл уравнения, с помощью которого можно исследовать влияние тарифов на спрос, заключается в определении такого набора y^* из допустимого множества Y , который является предпочтительным из всех остальных наборов

услуг y , принадлежащих Y . В терминах функции полезности задача формулируется так:

$$\begin{cases} y^* = \max_y (U(y)) \\ c \times y \leq B \end{cases}$$

Таким образом, поставлена задача нелинейного программирования:

■ переменными y являются уровни спроса на транспортные услуги;

■ в качестве целевой функции выступает функция полезности $U(y)$, которая считается непрерывно дифференцируемой (по крайней мере, дважды дифференцируемой) и имеет положительные первые частные производные и отрицательно определенную матрицу Гессе вторых частных производных;

■ ограничением является линейное неравенство при заданных ценах: $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$;

■ константой является доход B . Решение задачи потребления начинается с построения функции Лагранжа:

$$L(y, \lambda) = U(y) + \lambda(B - cy)$$

и составления условий первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial U(y)}{\partial y} - \lambda c = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = B - cy = 0 \end{cases}$$

решение которых позволит определить потребляемые услуги транспорта и множитель Лагранжа как функции цены и дохода:

$$y^* = y(c, B), \lambda^* = \lambda(c, B)$$

¹ Каждому доступному для пассажира виду транспорта соответствует в данном пространстве одно измерение. Таким образом, выбор потребителя представляет собой точку в этом пространстве. Координаты этой точки говорят о выборе потребителя между различными видами транспорта. Если рассматривается ситуация выбора между авиационным и железнодорожным транспортом, то евклидовым пространством будет координатная плоскость.

Подставляя эти функции в условия первого порядка, получим систему, состоящую из $n + 1$ тождеств, которая в матричной форме может быть представлена так:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(y^*(c, B))}{\partial y} - \lambda^*(c, B)c \equiv 0; \\ B - cy^*(c, B) \equiv 0. \end{cases}$$

Если продифференцировать эти $n + 1$ тождества по цене c_1 (тариф воздушного транспорта), то получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial c_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial c_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix},$$

$$\text{где } u_i = \frac{\partial U(y)}{\partial y_i}, u_{ij} = \frac{\partial U(y)}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Матрицей этой системы уравнений является окаймленная матрица Гессе² функции $U(y)$. Обозначим ее символом U .

Система уравнений относительно $\partial y / \partial c_1$ решается путем деления определителя матрицы, полученной заменой $(i + 1)$ -го столбца вектором свободных членов на определитель U . Вектор свободных членов содержит только две нулевые компоненты — первую и последнюю. Поэтому:

$$\frac{\partial y_i}{\partial c_1} = \frac{-\lambda y_i U_i + \lambda U_{i1}}{\det U},$$

где U_i — алгебраическое дополнение к элементу U_i в определителе U ; U_{i1} — алгебраическое дополнение к элементу U_{i1} в определителе U .

Для исследования влияния доходов B при неизменных тарифах на спрос необходимо условие первого порядка продифференцировать по B . В результате получим систему линейных уравнений, в которой вектор свободных членов будет иметь только один ненулевой элемент. Решая эту систему

уравнений по методу Крамера, получим:

$$\frac{\partial y_i}{\partial B} = \frac{\lambda U_i}{\det U}$$

Подставив результат в предыдущее уравнение, получим уравнение Слуцкого:

$$\frac{\partial y_i}{\partial c_1} = -y_1 \frac{\partial y_1}{\partial B} + \frac{\lambda U_{i1}}{\det U}, i \in [1, n]$$

Первый член определяет влияние дохода (индекс дохода), а второй — изменение спроса, являющееся следствием вариации тарифа (при условии, что $U(y)$ остается неизменной).

Таким образом, уравнение Слуцкого позволяет исследовать не только влияние дохода и тарифа на спрос по какому-либо виду транспорта (например, воздушному), но и влияние изменения тарифов на других видах транспорта на этот спрос при неизменяющемся бюджетном ограничении пассажиров. Такой подход позволяет комплексно подойти к проблеме формирования тарифной политики на транспорте.

Чтобы найти показатель спроса (решение полученного уравнения Слуцкого является показателем эластичности спроса по авиатарифу), необходимо проинтегрировать найденное выражение:

$$y(c_1, c_2) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial y}{\partial c} dc$$

Попробуем реализовать всю описанную выше теорию для решения практической задачи. Возьмем данные по перевозкам пассажиров железнодорожным и воздушным транспортом в России в последние годы.

Мы предположили, что функция полезности — это убывающая функция. Испанская исследовательская компания Padova Research совместно с университетами городов Тристи и Падова и авиакомпанией Air Dolomiti изучала закономерности

предпочтений того или иного вида транспорта пассажирами. Исследование показало, что наиболее подходящей для описания функции полезности является логарифмическая функция. Она и будет использована для моделирования функции полезности. Необходимо также ввести параметр предпочтения потребителем того или иного вида транспорта. Обозначим этот параметр через α . Он отражает предпочтение, т. е. желание пассажира воспользоваться конкретным видом транспорта. Очевидно, что, поскольку рост расходов на транспортные услуги опережает рост тарифов на них, при сохранении пропорций в тарифах на оба вида транспорта пассажиры будут чаще предпочитать авиационный транспорт железнодорожному, ведь авиаперелеты — более быстрый и комфортабельный способ путешествий. Таким образом, с ростом благосостояния пассажиров их готовность пользоваться авиационным транспортом будет увеличиваться с большей интенсивностью, чем готовность пользоваться железнодорожным. Функция полезности имеет следующий вид:

$$U(y) = \ln(y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha}),$$

где y_1 — спрос на первый вид транспорта;

y_2 — спрос на второй вид транспорта.

Расчет бюджетного ограничения пассажиров выполняется по формуле:

$$B = y_1 c_1 + y_2 c_2,$$

где c_1 — значение авиатарифа; c_2 — значение тарифа на железнодорожный транспорт.

Первый шаг — определение параметра α функции полезности. Для этого используется система зависимостей, полученная на основе решения уравнений первого порядка:

² Матрица Гессе — матрица вторых частных производных целевой функции.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{B}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} \left[\frac{c_1(1-\alpha)}{c_2 \alpha y_1^{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ y_2 = \frac{B - c_1 y_1}{c_2} \end{cases}$$

При помощи специального поискового алгоритма в пакете Excel осуществляется расчет параметра α для ряда лет. На основе полученного ряда делаются выводы о дальнейшем его поведении. Полученные данные (табл. 1) показывают рост данного параметра — т. е. свидетельствуют о том, что люди все чаще отдают предпочтение авиационному транспорту при прочих равных условиях. Поскольку дальнейший рост такими темпами невозможен (это объясняется природой параметра α , который не может превышать единицы), а снижения благосостояния населения не предвидится, можно предположить, что в дальнейшем величина α будет колебаться вокруг значения 0,8. Взяв именно такое его значение, можно прогнозировать авиа- и железнодорожную подвижность населения.

Входными данными модели являются прогнозируемое бюджетное ограничение и прогнозируемые средние тарифы на услуги авиационного и железнодорожного транспорта. Затем, умножив численность населения на коэффициенты подвижности, можно вычислить количество пассажиров каждого вида транспорта, путешествующих внутри страны. В табл. 1 показано изменение коэффициентов подвижности, количество перевезенных с 1995 г. по 2003 г. пассажиров и прогноз с 2004 г. по 2006 г. Прогноз основан на следующих допущениях. Численность населения в РФ существенно не изменится, рост реального (без учета инфляции) бюджетного ограничения составит 14%, рост авиа- и железнодорожных тарифов составит 10%. Используя этот же механизм, можно прогнозировать изменение перевозок отдельными авиакомпаниями. Для записи модели в общем виде допустим, что на линии работают n перевозчиков. Выбор пассажира

между авиакомпаниями значительно проще, чем между поездом и самолетом. При прочих равных условиях, пассажиру все равно, с каким перевозчиком лететь, поэтому коэффициент функции полезности α будет одинаков для всех перевозчиков и составит величину $1/n$, а целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$U(y) = \ln \left(y_1^{\frac{1}{n}} + y_2^{\frac{1}{n}} + \dots + y_n^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \sum_{i=1, n} y_i^{\frac{1}{n}}$$

y_i здесь не количество пассажиров перевозчика, а коэффициент, характеризующий это количество. Поскольку рынок авиаперевозок характеризуется неравномерным количеством предложения разными перевозчиками, число пассажиров зависит не только от цен на авиаперевозки, но и от выставленных провозных емкостей авиакомпаний. Обозначим через s_i долю i -го перевозчика, тогда число перевезенных пассажиров во введенных терминах составит $s_i y_i$.

Таблица 1. Прогноз количества авиапассажиров в зависимости от авиа- и железнодорожных тарифов

Годы	Численность населения	Бюджетное ограничение	Среднее значение:		По модели				Параметр функции полезности
			авиатарифа	железнодорожного тарифа	Авиаподвижность	Железнодорожная подвижность	Авиаперевозки, млн чел.	Железнодорожные перевозки, млн чел.	
	N	B	c_1	c_2	y_1	y_2	P_1	P_2	α
1995	148	290	488	173	0,21679	1,063719	32	157	0,59345
1996	147	360	718	246	0,18641	0,91939	27,4	135,2	0,61779
1997	147	379	819	309	0,16952	0,774802	24,9	113,7	0,60558
1998	146	370	979	321	0,15676	0,67588	22,9	98,9	0,69483
1999	146	598	2 149	371	0,14621	0,76455	21,3	111,3	0,84287
2000	145	864	2 635	466	0,15926	0,953666	23,1	138,1	0,8039
2001	144	993	2 899	512	0,16791	0,98740	24,2	142,2	0,8
2002	144	1132	3 188	564	0,17784	1,001670	25,6	144,2	0,8
2003	144	1290	3 507	620	0,18822	1,015957	27,1	146,3	0,8
2004 (прогноз)	144	1471	3 858	682	0,19906	1,030295	28,7	148,4	0,8
2005 (прогноз)	144	1676	4 244	750	0,21038	1,04467	30,3	150,4	0,8
2006 (прогноз)	144	1911	4 668	825	0,22221	1,059010	32	152,5	0,8

Таблица 2. Прогноз количества пассажиров «Сибири» в зависимости от тарифов этой компании и ее конкурентов

Годы	Бюджетное ограничение, млн руб.	Доли рынка, %		
		«Сибирь»	«Аэрофлот»	«Трансаэро»
2001	1,363,50	66	32	1
2002	1,720,01	67	33	
2003	2,375,67	70	26	4
2004 (прогноз)	3,088,37	60	20	20

Годы	Тарифы, тыс. руб.			Пассажиры, тыс. чел.		
	«Сибирь»	«Аэрофлот»	«Трансаэро»	«Сибирь»	«Аэрофлот»	«Трансаэро»
2001	4,3	4,4	4	211,447	99,043	4,622
2002	4,9	4,8	5	233,692	119,775	
2003	5,5	5,5	6	304,239	111,256	15,075
2004 (прогноз)	6,2	6	6,2	297,890	104,303	99,297

Записав функцию Лагранжа, взяв от нее производную по каждому перевозчику и добавив бюджетное ограничение, получим следующую систему, состоящую из $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{1}{\sum_{j=1,n} y_j^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{n} \times y_i^{-\frac{n-1}{n}} - \lambda c_i = 0 \\ B = \sum_{i=1,n} s_i y_i^{\frac{1}{n}} c_i \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем значения для y :

$$y_1 = \frac{B}{s_1 c_1 + \sum_{i=2,n} s_i c_i^{\frac{n}{n-1}} c_i^{\frac{n(n-2)}{n-1}}}$$

$$y_i = \left(\frac{c_1}{c_i} \right)^{\frac{n}{n-1}} y_1$$

В качестве примера рассмотрим линию Москва — Новосибирск — Москва. На линии действует три перевозчика: «Сибирь», «Аэрофлот» и «Трансаэро». Функция полезности примет вид:

$$U(y) = \ln \left(y_1^{\frac{1}{3}} + y_2^{\frac{1}{3}} + y_3^{\frac{1}{3}} \right),$$

где y_1 , y_2 и y_3 — коэффициенты характеристики спроса на услуги трех авиакомпаний. Бюджетное ограничение имеет вид:

$$B = s_1 y_1 c_1 + s_2 y_2 c_2 + s_3 y_3 c_3$$

Бюджетное ограничение для 2001–2003 гг. рассчитывается на основе данных о расписании и тарифах авиакомпаний-

конкурентов³. Рост бюджетного ограничения (табл. 2) в 2001 г. и в 2002 г. составил 26%, в 2003 г. — 38%. Допустим, рост бюджетного ограничения в 2004 г. составит 30%. Кроме того, в некоторой степени возрастут тарифы. Предположим, что доли перевозчиков пропорциональны предлагаемым провозным емкостям. Изменение доли «Трансаэро» обусловлено тем, что в начале 2001 г. этот перевозчик ушел с линии, а в конце 2003 г. вернулся. В 2004 г. он планирует полеты в таком же объеме, как «Аэрофлот».

Зависимость перевозок «Сибири» от уровня тарифов самой этой компании с одной стороны и «Трансаэро» и «Аэрофлота» с другой показана на рис. 1. Зависимость количества пассажиров от двух показателей изображена в трехмерном пространстве. На основе этой зависимости авиакомпания может планировать свои действия и устанавливать тарифы, ориентируясь на желаемый результат при известных уровнях тарифов конкурентов.

По модели можно не только сделать прогноз, но и вычислить показатель эластичности спроса на авиаперевозки. Он будет зависеть от значений бюджетного ограничения и уровней

тарифов на воздушном и железнодорожном транспорте. Следовательно, это коэффициент эластичности (см. приложение), включающий в себя одновременно эластичность по цене товара, по цене товара-заменителя и по доходу.

Графическое представление полученных значений эластичности (рис. 2) позволяет заключить: ■ что с 1991 г. по 1993 г. в России произошло резкое снижение эластичности спроса;

■ что в 1994 г. это снижение начало замедляться и в 1996 г. остановилось совсем;

■ что в 1998 г., в связи с дефолтом, снова произошло снижение эластичности спроса, которое прекратилось уже в 1999 г. Снижение эластичности спроса говорит о том, что пользоваться авиатранспортом стали только люди с достаточно высокими доходами, которые формируют менее эластичный спрос.

Для того чтобы составить прогноз об эластичности спроса на авиаперевозки, следует задать темпы роста бюджетного ограничения на услуги авиационного и железнодорожного транспорта, а также темпы роста тарифов на услуги этих видов транспорта. Рис. 3 показывает изменение эластичности спроса

³ Комаристый Е. Определение объема рынка авиаперевозок // Маркетинг в России и за рубежом. — 2004. — №1.

Рис. 1. Зависимость перевозок «Сибири» от уровней тарифов этой компании и ее конкурентов

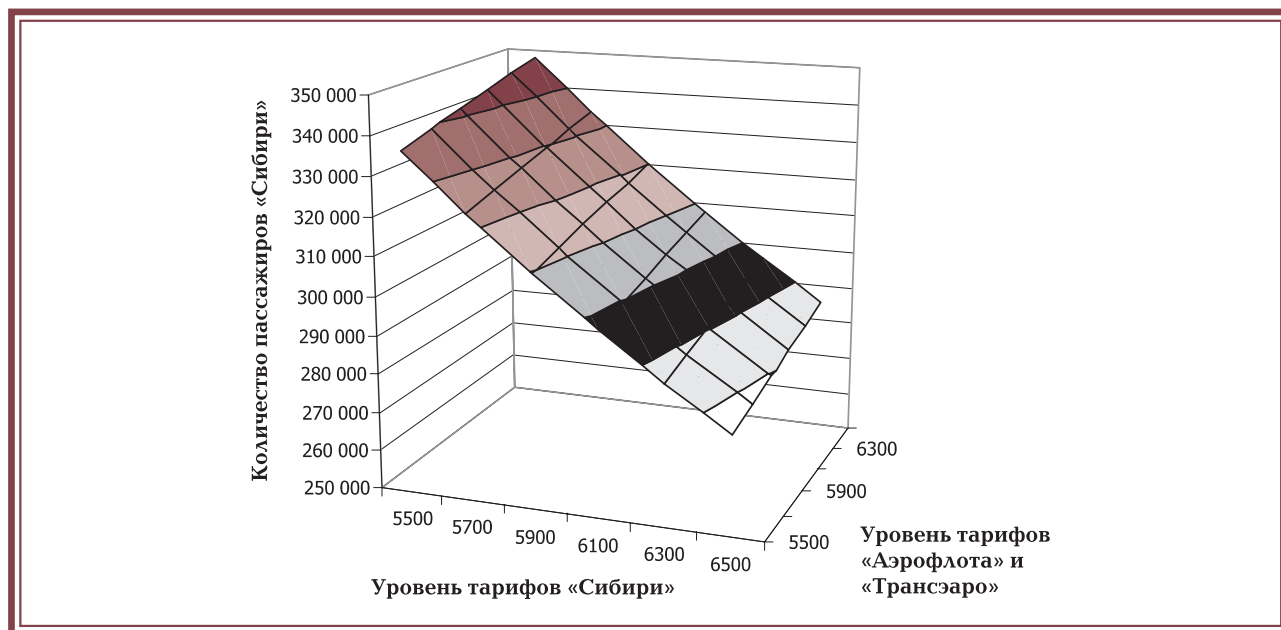


Рис. 2. График эластичности спроса на пассажирские авиаперевозки

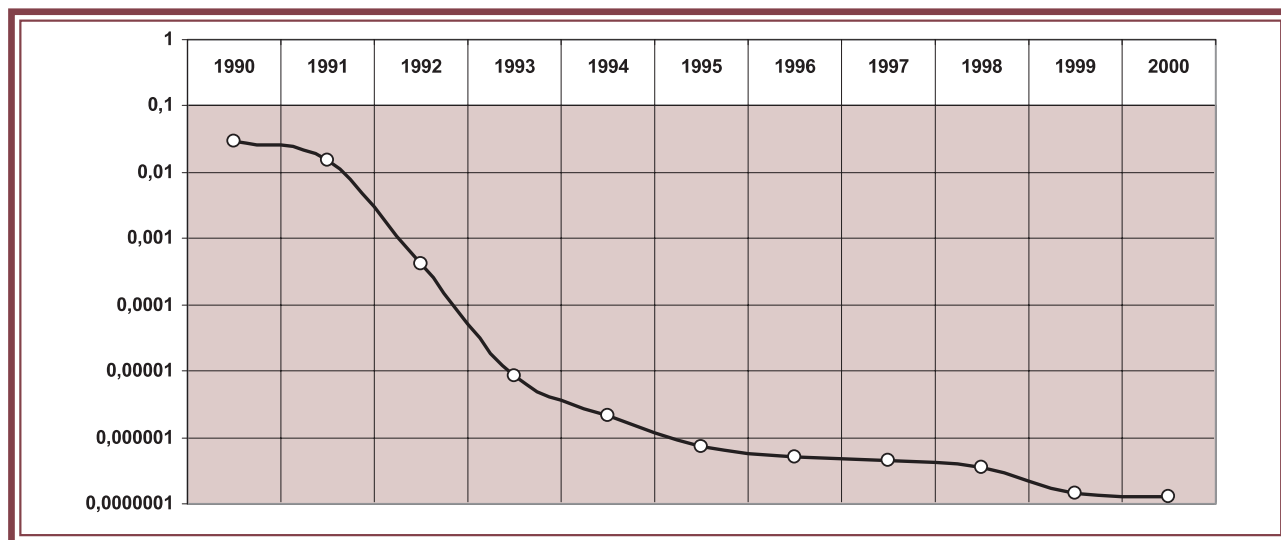


Рис. 3. Прогноз эластичности спроса на услуги авиатранспорта



с 1999 г. по 2003 г. и прогноз на 2004 г.

На основе прогноза эластичности можно судить о взаимосвязи

изменения тарифов на авиаперевозки и объемов перевозок. Это позволяет планировать парк воздушных судов, принимать

решения о покупке или аренде дополнительных самолетов, строить долгосрочные прогнозы развития отдельных рынков. ■

Приложение

Чтобы вычислить коэффициент эластичности, необходимо рассчитать первые и вторые частные производные целевой функции и сформировать из них окаймленную матрицу Гессе. Частные производные рассчитывают по формулам:

$$u_1 = \frac{\partial U(y)}{\partial y_1} = \frac{\alpha y_1^{\alpha-1}}{y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha}},$$

$$u_2 = \frac{\partial U(y)}{\partial y_2} = \frac{(1-\alpha)y_2^{-\alpha}}{y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha}},$$

$$u_{11} = \frac{\partial U(y)}{\partial y_1 \partial y_1} = \frac{\alpha(\alpha-1)y_1^{\alpha-2}}{y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha}} - \left[\frac{\alpha y_1^{\alpha-1}}{y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha}} \right]^2,$$

$$u_{12} = u_{21} = \frac{\partial U(y)}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\alpha(\alpha-1)y_1^{\alpha-1}}{y_2^\alpha (y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha})^2},$$

$$u_{22} = \frac{\partial U(y)}{\partial y_2 \partial y_2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{y_2^{\alpha+1} (y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha})} - \left[\frac{\alpha-1}{y_2^\alpha (y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha})} \right]^2$$

Затем следует вычислить определитель матрицы по формулам:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} &= 0 \times \det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} - u_1 \times \det \begin{pmatrix} u_1 & u_{12} \\ u_2 & u_{22} \end{pmatrix} + u_2 \times \det \begin{pmatrix} u_1 & u_{11} \\ u_2 & u_{21} \end{pmatrix} = \\ &= -u_1(u_1 u_{22} - u_{12} u_2) + u_2(u_1 u_{21} - u_{11} u_2) \end{aligned}$$

И алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$U_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = -u_1 u_{22} + u_2 u_{21},$$

$$U_{11} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} = u_2(0 - 1 \times u_2) = -u_2^2$$

На заключительном этапе расчетов вычисляется множитель Лагранжа:

$$\frac{\partial U(y)}{\partial y_1} - \lambda c_1 = 0,$$

$$\lambda = \frac{\alpha y_1^{\alpha-1}}{c_1 (y_1^\alpha + y_2^{1-\alpha})}$$

и по уравнению Слуцкого определяется производная. Искомый коэффициент эластичности будет равен этой производной, взятой с противоположным знаком.

Литература

1. Котлер Ф. Основы маркетинга. — М.: Прогресс, 1990.
2. Малхотра Нереш К. Маркетинговые исследования. — М.: Вильямс, 2003.

3. Пирс А. Теория спроса, рента и суверенитет потребителя // Современная экономическая мысль. Серия «Экономическая мысль Запада» / Ред.: Афанасьева В. С. и Энтова Р. М. — М.: «Прогресс», 1981.

4. Бусыгин В. П., Желободько Е. В. и др. Микроэкономический анализ несовершенных рынков. — Новосибирск: НГУ, 2000.